3次体の数え上げ (解析的整数論 : 超越関数の数論的性質とその応用)

谷口, 隆

数理解析研究所講究録
第 1898 巻 2014 年 124-139

3次体の数え上げ

神戸大学・大学院理学研究科　谷口 隆
Takashi Taniguchi
Department of Mathematics, Faculty of Sciences,
Kobe University

概要

3 次体を数える関数について第二主要項の存在を証明した，Frank Thorne 氏と筆者の共同研究 [35, 36] と，関連する話題について概説する．主定理の周辺にある数学的背景と，証明の全体的な方針を紹介する．特に，篩によって極大な 3 次環のみを数えるプロセスにおいて，平方自由篩の古典的な方法が有用であることを説明する．

1 はじめに

$N_2^{\pm}(X)$ で $0 < \pm\mathrm{Disc}(F) < X$ となるような 2 次体 F の個数を表すものとしよう．これは平方自由な数の個数を数える関数と非常に近く，比較的初等的な考察によって，漸近公式

$$N_2^{\pm}(X) = \frac{1}{2\zeta(2)}X + O(\sqrt{X}) \tag{1}$$

が得られる．証明は 3 節の冒頭で復習することとし，今度は同様に，$0 < \pm\mathrm{Disc}(F) < X$ となるような 3 次体 F の個数 $N_3^{\pm}(X)$ を考えよう．$N_3^{\pm}(X)$ の漸近挙動を調べることは $N_2^{\pm}(X)$ の場合に較べると遥かに非自明になるが，主要項が 1971 年の Davenport-Heilbronn [12] の研究によって決定されたことはよく知られている．2010 年には Belabas-Bhargava-Pomerance [1] により誤差項のよい改良が得られ，

$$N_3^{\pm}(X) = \frac{C^{\pm}}{12\zeta(3)}X + O(X^{7/8+\epsilon}) \tag{2}$$

が示されていた．ただし $C^+ = 1, C^- = 3$ であり，ϵ は任意に固定した正数である．(以下 ϵ は常にこの意味で用いる．) ところで，実際の個数とこの主要項を比較すると次のようになる．

X	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$N_3^-(X)$	7	127	1520	17041	182417
$(4\zeta(3))^{-1}X$	21	207	2080	20798	207977

主要項は実際の個数より多く見積もることが見て取れる．このことから，低次の主要項が存在することが推測され，Datskovsky-Wright [11], Roberts [26] により具体的な第二主要項が予想されていた．今回，Frank Thorne 氏との共同研究 [35] で，その予想を証明することができた．次は (2) の改良である．

定理 1 $K^+ = 1, K^- = \sqrt{3}$ として，次が成り立つ．

$$N_3^{\pm}(X) = \frac{C^{\pm}}{12\zeta(3)}X + K^{\pm}\frac{4\zeta(1/3)}{5\Gamma(2/3)^3\zeta(5/3)}X^{5/6} + O(X^{7/9+\epsilon}). \tag{3}$$

注 2 なお，第二主要項と $O(X^{13/16+\epsilon})$ の誤差項が，Bhargava-Shankar-Tsimerman [9] によっても独立に与えられた．証明も我々のものとは異なり，[9] ではゼータ関数は用いられない．

実際の個数と二つの主要項による値を比較すると，次のようになる．

X	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$N_3^-(X)$	7	127	1520	17041	182417
二つの主要項	9	127	1529	17043	182397

主要項二つで実際の $N_3^{\pm}(X)$ をかなりよく近似していることが観察される．$N_3^{\pm}(X)$ についてはこれ以上主要項はなく，誤差項は "ランダムな振動項" ではないかと考えられている．

注 3 $N_2^{\pm}(X)$ についても，(1) の $\zeta(2)^{-1}X$ 以外には主要項はないと考えられており，誤差項の真のオーダーは $O(X^{1/4+\epsilon})$ と予想されている．また $N_3^{\pm}(X)$ についても，一定の考察から (3) の誤差項の真のオーダーは $O(X^{3/8+\epsilon})$ ではないかと推測することができる．いずれも証明は困難だと考えられる．

次節以降で定理 1 の証明の概要を説明するが，その前にこの問題の背景について少し述べておきたい．比較のために，$0 < \mathrm{Disc}(F) < X$ となる 4 次体 F で，その $\mathbb{Q}$ 上の Galois 閉包の Galois 群が 4 次交代群 $\mathfrak{A}_4$ と同型になるものの個数 $N_4(\mathfrak{A}_4; X)$ について考えてみよう．"自明" な評価は $O(X)$ であり，真の増大度については次が予想されている．

$$N_4(\mathfrak{A}_4; X) \overset{?}{=} cX^{1/2}\log X + o(X^{1/2}\log X). \tag{4}$$

しかし現在知られている最良の評価は

$$N_4(\mathfrak{A}_4; X) = O(X^{5/6+\epsilon}) \tag{5}$$

であり，今のところ (4) が証明される見通しは立っていない．(4) と (5) の落差は，代数体の判別式を数えることが一般にはかなり難しい問題であることを示唆していると考えられる．$N_3^{\pm}(X)$ についても，その漸近挙動を考えることは素朴で自然な問題意識とは言えるが，それが数学的に筋のよい問題であることの先験的な理由は，おそらくない．事実としては $N_3^{\pm}(X)$ には (3) のような精密な漸近公式が存在するが，このような公式が存在し，しかもそれが証明可能であるためには，相応に精密な数学的構造を持つ対象が必要である．今回の (3) の場合はその対象とは，**2 元 3 次形式の空間**と呼ばれる**概均質ベクトル空間**の具体的な一例である．

背景についてもう少し説明を付け加えたい．(3) は 3 次体の判別式の "よい" 公式と言えるだろうが，これで 3 次体の判別式が全て分かったわけでは無論ない．例えば，X 以下の素数を判別式にもつ 3 次体の個数 $N^+_{3,\mathrm{prime}}(X)$ を考えよう．$N_3^+(X) \sim cX$ なのだから，3 次体の判別式が $\mathbb{Z}$ 内でレギュラーに分布しているなら，

$$N^+_{3,\mathrm{prime}}(X) \overset{?}{\sim} c'\frac{X}{\log X} \qquad (\exists c' > 0) \tag{6}$$

ではないかと想像することができる．これについて，上からの評価

$$N^+_{3,\mathrm{prime}}(X) = O\left(\frac{X}{\log X}\right)$$

は証明できる．しかし下からの評価は難しく，$\lim_{X\to\infty} N^{+}_{3,\mathrm{prime}}(X)=\infty$ であること，つまり判別式が素数となる 3 次体が無限個存在することも証明できていない．これと比較すれば，主要項を含む漸近公式として素数定理

$$\pi(X)=\int_2^X \frac{dt}{\log t}+O\left(X\exp(-c''\sqrt{\log X})\right) \qquad (\exists c''>0)$$

が証明できるのは，Riemann ゼータ関数という解析関数の Euler 積を利用できるからであると言ってよい．(6) についても，そのような構造が見つからない限り，証明は難しいと思われる．対応する構造が見つかっていないという事情は (4) も同じである．

以下，2 元 3 次形式の空間の数論的解析についてなるべく平易に解説したい．概均質ベクトル空間の数論との関わりや，古典的な平方自由篩の手法について，もし読者に何らかの示唆をもたらすことができれば幸いである．最終節は簡単な文献案内を記した．

2　2 元 3 次形式の空間のゼータ関数

2 元 3 次形式の空間を導入する．

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{Z}} &:= \mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2=\{f(x,y)=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3 \mid a,b,c,d\in\mathbb{Z}\},\\ G_{\mathbb{Z}} &:= \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

とし，$G_{\mathbb{Z}}$ の $V_{\mathbb{Z}}$ への作用を次で定める．

$$(g\cdot f)(x,y)=\frac{1}{\det(g)}\cdot f(px+ry,qx+sy), \qquad f\in V_{\mathbb{Z}}, \quad g=\begin{pmatrix} p & q\\ r & s\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}).$$

$f(x,y)=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3\in V_{\mathbb{Z}}$ の判別式が

$$\mathrm{Disc}(f)=b^2c^2+18abcd-4ac^3-4b^3d-27a^2d^2 \tag{7}$$

により定まる．$\mathrm{Disc}(f)$ が $G_{\mathbb{Z}}$ の作用に対して不変であることはよく知られている．

単位的可換環 R で，$\mathbb{Z}$ 加群として階数 3 の自由加群であるものを **3 次環**とよぼう．例えば 3 次体 F の整数環 $\mathcal{O}_F$ やそのオーダーは 3 次環である．3 次環 R の判別式 $\mathrm{Disc}(R)$ の定義を復習しておく．$\mathrm{Tr}\colon R\to\mathbb{Z}$ を通常の跡 (trace) とする．すなわち $\alpha\in R$ に対し，$\mathbb{Z}$ 加群としての自己準同型 $R\ni x\mapsto \alpha x\in R$ の跡を $\mathrm{Tr}(\alpha)\in\mathbb{Z}$ とする．R について $\mathbb{Z}$ 基底をとって $R=\mathbb{Z}\alpha_1\oplus\mathbb{Z}\alpha_2\oplus\mathbb{Z}\alpha_3$ とし，$\mathbb{Z}$ 係数 3 次正方行列 $(\mathrm{Tr}(\alpha_i\alpha_j))$ の行列式を $\mathrm{Disc}(R)\in\mathbb{Z}$ とする．これは基底の取り方によらない．代数体の判別式の定義を思い出せば，$\mathrm{Disc}(F)=\mathrm{Disc}(\mathcal{O}_F)$ であることが分かる．

整軌道の集合 $G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}$ が 3 次環を分類しているという次の命題は Levi により部分的に見出され[1]，後に Gan-Gross-Savin [15] により完全に示された．

命題 4 (Levi, [15]) 整軌道の集合 $G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}$ と 3 次環の同型類のなす集合の間に，判別式を保つような標準全単射が存在する．また，これによって $f\in V_{\mathbb{Z}}$ に対応する 3 次環を R とすれば，f の固定部分群 $\mathrm{Stab}(f)=\{g\in G_{\mathbb{Z}}\mid g\cdot f=f\}$ は R の環としての自己同型群 $\mathrm{Aut}\,(R)$ と同型である．

[1] 歴史的な偶然から，Delone-Faddeev 対応と呼ばれることが多い．この対応は Delone-Faddeev の著作 [13] で広く知られるようになった．[13] の序文では Levi の発見であると書かれていたが，本文中に Levi の名がなかったため気づかなかった読者が多く，このようなことになってしまったようである．

証明は [15] または Bhargava [3] を参照いただきたい．対応だけ述べれば，$f(x,y)=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3\in V_{\mathbb{Z}}$ に対し，階数 3 の自由加群 $R=\mathbb{Z}\cdot 1\oplus\mathbb{Z}\cdot\omega_1\oplus\mathbb{Z}\cdot\omega_2$ に，可換かつ分配的な積構造を，1 が単位元かつ

$$\begin{aligned}\omega_1^2&=-ac-b\omega_1+a\omega_2,\\ \omega_2^2&=-bd-d\omega_1+c\omega_2,\\ \omega_1\omega_2&=-ad\end{aligned}$$

となるように定めると，結合律をみたすことが確かめられ，R は 3 次環になる．これが命題 4 の対応を与える．

この命題により，3 次環 R を判別式 $\mathrm{Disc}(R)$ の順序で数える問題と，$V_{\mathbb{Z}}$ の $G_{\mathbb{Z}}$ 軌道 $G_{\mathbb{Z}}\cdot f$ を判別式 $\mathrm{Disc}(f)$ の順序で数える問題が等価になるが，後者は格子点問題の一例とみなすことができるため，具体的なアプローチが取りやすい．1 節冒頭の 2 次体を数える場合でも，比較的単純な問題であるが，2 次体の集合を平方自由な整数の集合に置き換えることによって (1) の具体的な数え上げが可能になる—このことと照らし合わせると，定理 1 を証明する上での命題 4 の位置づけがはっきりする[2]だろう．

さて，2 元 3 次形式の空間は概均質ベクトル空間の一例である．概均質ベクトル空間の概念は 1960 年代はじめに佐藤幹夫氏によって導入された．少し後にそれぞれの概均質ベクトル空間には自然に "ゼータ関数" と呼ばれる Dirichlet 級数が付随していることが，佐藤幹夫氏と新谷卓郎氏により見出され，Sato-Shintani [30] で一般論が建設された．このゼータ関数は表現の $\mathbb{Z}$ 軌道を数える母関数であり，関数等式が，反傾表現に付随するゼータ関数との間に成立する．ただしこのゼータ関数は一般には Euler 積を持たないし，Euler 積の有限和でもない[3]．

特に 2 元 3 次形式の空間の場合はゼータ関数は Shintani [32] により導入され詳しく研究されたので，新谷ゼータ関数と呼ばれることも多い．その定義を振り返ろう．

$$V_{\mathbb{Z}}^*=\{f(x,y)=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3\in V_{\mathbb{Z}}\mid b,c\in 3\mathbb{Z}\}$$

とおく．これは $V_{\mathbb{Z}}$ の $G_{\mathbb{Z}}$ 不変な部分格子であり，$G_{\mathbb{Z}}$ の表現として $V_{\mathbb{Z}}$ の反傾表現 $\mathrm{Hom}(V_{\mathbb{Z}},\mathbb{Z})$ に (本質的に) 同型である．$f\in V_{\mathbb{Z}}^*$ については，(7) を見れば明らかなように，$\mathrm{Disc}(f)$ は 27 の倍数となる．

定義 5 (Shintani [32]) 各符号ごとに，Dirichlet 級数を次で定める．

$$\xi^{\pm}(s):=\sum_{\substack{f\in G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}\\ \pm\mathrm{Disc}(f)>0}}\frac{|\mathrm{Stab}(f)|^{-1}}{|\mathrm{Disc}(f)|^s},$$

$$\xi^{*\pm}(s):=\sum_{\substack{f\in G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}^*\\ \pm\mathrm{Disc}(f)>0}}\frac{|\mathrm{Stab}(f)|^{-1}}{|\mathrm{Disc}(f)/27|^s}.$$

ただし，$|\mathrm{Stab}(f)|$ は f の固定部分群 $\mathrm{Stab}(f)$ の位数である．

[2] $N_3^{\pm}(X)$ の漸近挙動を調べる他の方法がないとは言えないが，現在のところ第一主要項 $C^{\pm}4^{-1}\zeta(3)^{-1}X$ であっても，2 元 3 次形式の空間を用いずに証明する方法は知られていない．ただし他のアプローチの可能性について興味のある読者は Thorne [37] を参照されたい．

[3] 定義 5 のゼータ関数については，Euler 積の有限和ではないことが Thorne [38] により示されている．

Stab(f) は 3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ の部分群と同型になるので，$|\mathrm{Stab}(f)|$ は $1,2,3,6$ のいずれかである．これらの和は $\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束し，この領域で s の正則関数を定める．このゼータ関数の解析的性質は次にまとめられる．

定理 6 (Shintani [32]) (i) 4 つの Dirichlet 級数 $\xi^{\pm}(s)$, $\xi^{*\pm}(s)$ は全複素数平面に有理型に解析接続され，$s=1,5/6$ での一位の極を除き正則である．
(ii) 4 つの Dirichlet 級数の $s=1,5/6$ での留数はそれぞれ次の表のようになる．

	$\xi^+(s)$	$\xi^-(s)$	$\xi^{*+}(s)$	$\xi^{*-}(s)$
$s=1$	$\dfrac{\pi^2}{18}$	$\dfrac{\pi^2}{9}$	$\dfrac{\pi^2}{9}$	$\dfrac{\pi^2}{6}$
$s=5/6$	$\dfrac{\pi^2\zeta(1/3)}{9\Gamma(2/3)^3}$	$\dfrac{\pi^2\zeta(1/3)}{3\sqrt{3}\Gamma(2/3)^3}$	$\dfrac{\pi^2\zeta(1/3)}{3\sqrt{3}\Gamma(2/3)^3}$	$\dfrac{\pi^2\zeta(1/3)}{3\Gamma(2/3)^3}$

(iii) 次の関数等式が成り立つ．

$$\begin{pmatrix}\xi^+(1-s)\\ \xi^-(1-s)\end{pmatrix} = \frac{3^{3s-2}}{2\pi^{4s}}\Gamma(s)^2\Gamma\left(s-\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix}\sin 2\pi s & \sin\pi s\\ 3\sin\pi s & \sin 2\pi s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^{*+}(s)\\ \xi^{*-}(s)\end{pmatrix}.$$

証明の方針は，いわゆる Iwasawa-Tate の方法である．ゼータ関数を積分表示し，Poisson の和公式

$$\sum_{f\in V_{\mathbb{Z}}}\Phi(g\cdot f) = |\det g|^{-2}\sum_{f^*\in V_{\mathbb{Z}}^*}\widehat{\Phi}(g^{\iota}\cdot f^*), \qquad \Phi\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}), g\in G_{\mathbb{R}}$$

を用いて積分を計算する．証明の詳細は [32, 40] を参照されたい．

定理 6 から，Landau の Tauber 型定理 [21] を用いて，整軌道の数え上げについて次の結果が得られる．

系 7 (Shintani) $\xi^{\pm}(s)=\sum a_{\pm n}/n^s$ とおくと，

$$\sum_{0<n<X} a_n = \frac{\pi^2}{18}X + \frac{\pi^2\zeta(1/3)}{9\Gamma(2/3)^3}\frac{X^{5/6}}{5/6} + O(X^{3/5+\epsilon}),$$
$$\sum_{0<-n<X} a_n = \frac{\pi^2}{9}X + \frac{\pi^2\zeta(1/3)}{3\sqrt{3}\Gamma(2/3)^3}\frac{X^{5/6}}{5/6} + O(X^{3/5+\epsilon}).$$

定理 6 から系 7 を導く方法については解析数論の分野ではよく知られているが，ごく簡単に要点を述べよう．Perron の公式とよばれる公式

$$\sum_{0<n<X} a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)=c}\xi^+(s)\frac{X^s}{s}ds$$

が出発点である．ここで c は 1 より大きい実数の定数であり，積分は虚軸に平行な直線 $\mathrm{Re}(s)=c$ 上の線積分である．$\xi^+(s)$ が $\mathrm{Re}(s)>1$ で正則であることから，右辺の積分は $c>1$ の取り方によらない．この直線を左にずらすと，留数定理によって

$$\sum_{0<n<X} a_n = (\operatorname*{Res}_{s=1}\xi^+(s))X + (\operatorname*{Res}_{s=5/6}\xi^+(s))\frac{X^{5/6}}{5/6} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)=c'}\xi^+(s)\frac{X^s}{s}ds \tag{8}$$

のような式が得られる．$c' < 0$ となるまで積分の直線をずらして関数等式を用いると，s は $\xi^{*\pm}(s)$ の絶対収束域に入る．それによって (8) の右辺第3項を評価するというのが筋道である．ただし実際にはこの項は収束の問題がデリケートであって単純でなく，ここをクリアするのが技術的なポイントである．原論文は上述の [21] であるが，Sato-Shintani [30, §3] や Chandrasekharan-Narsimran [10, §4] にも使いやすい形でまとめられている．

3 定理1の証明

系7は軌道 $G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}$ を判別式の順序で数えているので，命題4によれば**3次環**を判別式の順序で数えていることにもなる．一方の定理1は**3次体**(の整数環)を判別式の順序で数えている．3次体の整数環は極大な3次環である．よって，系7の発展として定理1を得るためには，3次環すべてでなく，極大な3次環のみを数える方法を考えなければならない．

ここで比較のため，冒頭の公式 (1) の導出を簡単に振り返りたい．平方自由な数の個数

$$A(X) := (0 < n < X \text{ となる平方自由な整数 } n \text{ の個数})$$

を数えることができれば，同じ手法によって (1) も得られるので，ここでは簡単のため $A(X)$ の漸近公式を問題にする．これについて，Gegenbauer の定理の名でも知られる次の古典的な命題が成り立つ．

命題 8

$$A(X) = \frac{1}{\zeta(2)}X + O(\sqrt{X}).$$

(証明) 平方自由な正整数 q について，

$$A(q;X) := (0 < n < X \text{ で } q^2 \text{ の倍数となる } n \text{ の個数})$$

と定める．包除原理 (inclusion-exclusion principle) によって

$$A(X) = \sum_q \mu(q)A(q;X)$$

である．ただし $\mu(q)$ は Möbius 関数で，q は平方自由な整数全体をわたる[4]．ここで，$A(q;X) = \lfloor q^{-2}X \rfloor$ だから，q, X について一様な評価

$$A(q;X) = q^{-2}X + O(1), \tag{9}$$
$$A(q;X) = O(q^{-2}X), \tag{10}$$

が成り立つ．独立なパラメーター Q を用意し，和を次のように分ける．

$$A(X) = \sum_{q \le Q} \mu(q)A(q;X) + \sum_{q > Q} \mu(q)A(q;X). \tag{11}$$

[4] q が平方因子をもてば $\mu(q) = 0$ なので，形式的に q は正の整数全体をわたると考えてもよい．また $q^2 > X$ ならば $A(q;X) = 0$ なので，この和は実質的に有限和である．

第1項には (9) を，第2項には (10) を用いると，

$$\begin{aligned}A(X) &= X\sum_{q\le Q}\frac{\mu(q)}{q^2} + O(\sum_{q\le Q}1) + O(X\sum_{q>Q}q^{-2})\\ &= X\left(\sum_q\frac{\mu(q)}{q^2} + O(\sum_{q>Q}q^{-2})\right) + O(Q) + O(XQ^{-1})\\ &= X\sum_q\frac{\mu(q)}{q^2} + O(Q+XQ^{-1})\end{aligned}$$

となる．$Q = XQ^{-1}$ となるよう Q を選ぶ．このとき $Q = X^{1/2}$，$O(Q+XQ^{-1}) = O(X^{1/2})$ であり，また $\sum_q \frac{\mu(q)}{q^2} = \prod_p(1-\frac{1}{p^2}) = 1/\zeta(2)$ なので示された． ■

証明で用いた (9), (10) はごく初等的な評価だが，(11) に使えるためには，評価が X についてだけでなく q についても一様である点が鍵である．この証明を始めてご覧になった方[5]は，例えば X 以下の立方自由な正整数の個数 $B(X)$ について，$B(X) = \zeta(3)^{-1}X + O(X^{1/3})$ が同様の手順で得られるので，お試しいただきたい．

極大な3次環を数えるという当初の問題に戻ろう．関数

$$M^{\pm}(X) := \#\{R : 3\text{次環} \mid 0 < \pm\mathrm{Disc}(R) < X,\ R\text{:極大}\}$$

を考える[6]．極大な3次環は3次体 F の整数環 $\mathcal{O}_F$ か2次体 L と $\mathbb{Z}$ の直積 $\mathcal{O}_L\times\mathbb{Z}$ か $\mathbb{Z}^3$ のいずれかである．$\mathrm{Disc}(\mathcal{O}_L\times\mathbb{Z}) = \mathrm{Disc}(\mathcal{O}_L)$, $\mathrm{Disc}(\mathbb{Z}^3) = 1$ から

$$M^{\pm}(X) = N_3^{\pm}(X) + N_2^{\pm}(X) + 1 \tag{12}$$

である．$N_2^{\pm}(X)$ は (1) によってよって分かるので，$M^{\pm}(X)$ を問題にすればよい．

極大であることは局所的な条件であること，すなわちそれぞれの素数 p に対し，p において極大であることが必要十分であることに注意しよう．このことから，命題8と同様のアプローチで証明ができないかと考えることができる．これを指摘したのが Belabas-Bhargava-Pomerance [1] で，それによって彼らは (2) の誤差項 $O(X^{7/8+\epsilon})$ を得た．

すなわち，平方自由な q に対し，

$$M^{\pm}(q;X) := \#\left\{R : 3\text{次環} \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 < \pm\mathrm{Disc}(R) < X, \\ R\text{ は }q\text{ の任意の素因子 }p\text{ において極大でない}\end{array}\right\}$$

とおく．包除原理によって

$$M^{\pm}(X) = \sum_q \mu(q)M^{\pm}(q;X) \tag{13}$$

である．この和を

$$M^{\pm}(X) = \sum_{q\le Q}\mu(q)M^{\pm}(q;X) + \sum_{q>Q}\mu(q)M^{\pm}(q;X) \tag{14}$$

と分けて，$M^{\pm}(q;X)$ について (9) と (10) に対応する一様評価をそれぞれ適用するのである．

[5]入門書では，例えば Hardy-Wright [16, §18.6] に命題8の証明がある．

[6]実際の証明のためにはゼータ関数との関係で，$|\mathrm{Aut}\,(R)|^{-1}$ の重みをつけて数えるのが正確なのだが，説明の便のためこのように定めた．詳しくは後述の注11を参照いただきたい．

技術的にはここからが本題となる．まず (10) に対応する評価について考える．3 次環すべての個数 $M^{\pm}(1;X)$ については，系 7 から $O(X)$ である．R が R' に指数 q で含まれていれば $\mathrm{Disc}(R)=q^2\mathrm{Disc}(R')$ なので，ごく素朴に考えると，

$$M^{\pm}(q;X)\overset{?}{\approx}M^{\pm}(1;q^{-2}X)=O(q^{-2}X)$$

のような評価が想像される．この推測はあまりに単純だが，実際には次が証明される．

補題 9 (Belabas-Bhargava-Pomerance [1])

$$M^{\pm}(q;X)\ll_{\epsilon}q^{-2+\epsilon}X. \tag{15}$$

このような評価を得ることは一般には非常に難しいこともある[7]が，今回の場合は 3 次環が別の 3 次環に含まれている状況を直接具体的に調べることで，比較的簡単に証明される．このことから，(14) の第二項について次が得られる．

$$\sum_{q>Q}\mu(q)M^{\pm}(q;X)=O_{\epsilon}(Q^{-1+\epsilon}X). \tag{16}$$

次に (9) に対応する評価だが，こちらについては X と $X^{5/6}$ のオーダーの主要項を含む式を導くのだから，系 7 のときのようにゼータ関数とその解析的性質が必要となる．Perron の公式によって $M^{\pm}(q;X)$ と対応する Dirichlet 級数を次で定める．

定義 10 (q-非極大ゼータ関数) $V_{\mathbb{Z}}$ の部分集合 $V_{\mathbb{Z}}(q)$ を，対応する 3 次環が q の任意の素因子 p において極大でないような 2 元 3 次形式のなす集合とし，

$$\xi_q^{\pm}(s):=\sum_{\substack{f\in G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}(q)\\ \pm\mathrm{Disc}(f)>0}}\frac{|\mathrm{Stab}(f)|^{-1}}{|\mathrm{Disc}(f)|^{s}}$$

と定める．

注 11 証明の便のため，上では $M^{\pm}(X), M^{\pm}(q;X)$ を個数をそのまま数える関数として素朴に定義したが，正確には若干の修正が必要である．定義 5, 10 の Dirichlet 級数は軌道の個数を $|\mathrm{Stab}(f)|^{-1}$ の重みをつけて数えており，命題 4 によって 3 次環の側に移っても，それは 3 次環を $|\mathrm{Aut}\,(R)|^{-1}$ の重みをつけて数えることになる．したがって Perron の公式を使うために，$M^{\pm}(q;X)$ は正しくは

$$M^{\pm}(q;X)=\sum_{\substack{0<\pm\mathrm{Disc}(R)<X\\ R:\ \text{non-maximal at }\forall p\mid q}}|\mathrm{Aut}\,(R)|^{-1},$$

と定義し，したがって包除原理 (13) が成り立つために $M^{\pm}(X)$ は

$$M^{\pm}(X)=\sum_{\substack{0<\pm\mathrm{Disc}(R)<X\\ R:\ \text{maximal}}}|\mathrm{Aut}\,(R)|^{-1},$$

[7] 上述のように，$[R':R]=q$ のとき $\mathrm{Disc}(R)=q^2\mathrm{Disc}(R')$ なので，今回の篩は (7) の 4 変数多項式 $\mathrm{Disc}(f)$ の平方自由篩 (square-free sieve) の一種と考えることができる．多項式の，平方自由篩を含む冪自由篩 (power-free sieve) については，例えば Hooley [17, Chapter 4] などを参照されたい．なお，概均質ベクトル空間と余正則空間に現れる不変式の平方自由篩については，最近 Bhargava [8] により一般的に有用な定理とその応用が得られた．

と定義する必要がある．

一般には環の数え上げは，このように自己同型群の位数の逆数で重みをつけて数える方が自然なようである．ただし今回の場合は，$\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_F)=\mathrm{Aut}(F)$ は F が $\mathbb{Q}$ の Galois 拡大でなければ自明であり，また 3 次 Galois 拡大の個数は $O(X^{1/2})$ なので，定理 1 は重みをつけてもつけなくても同じ漸近公式になる．2 次体 L に対し，$\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_L\times\mathbb{Z})\cong\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_L)\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ だから，(12) は

$$M^{\pm}(X)=N_3^{\pm}(X)+2^{-1}N_2^{\pm}(X)+O(\sqrt{X}) \tag{17}$$

と修正すると正確である．

鍵となる観察は次である．

命題 12 (Davenport-Heilbronn [12]) $V_{\mathbb{Z}}(q)$ は係数 a,b,c,d の $\bmod q^2$ の合同条件によって定まる．すなわち，$V_{\mathbb{Z}}(q)$ の特性関数 $\Psi_q\colon V_{\mathbb{Z}}\to\{0,1\}$ は，法 q^2 の商写像 $V_{\mathbb{Z}}\twoheadrightarrow V_{\mathbb{Z}/q^2\mathbb{Z}}$ を経由する．

これは Fourier 解析が適用できる状況であり，定理 6 の証明と同様に Poisson の和公式を使って $\xi_q^{\pm}(s)$ の解析的性質を調べることができ，留数公式および関数等式が得られる．留数は Datskovsky-Wright [11] によって次のように具体的に計算されている．

$$\alpha_q^{\pm}:=\operatorname*{Res}_{s=1}\xi_q^{\pm}(s)=C^{\pm}\frac{\pi^2}{72}\prod_{p|q}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p^5}\right)+\frac{\pi^2}{24}\prod_{p|q}\left(\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p^4}\right),$$

$$\beta_q^{\pm}:=\operatorname*{Res}_{s=5/6}\xi_q^{\pm}(s)=K^{\pm}\frac{\pi^2\zeta(1/3)}{9\Gamma(2/3)^3}\prod_{p|q}\left(\frac{1}{p^{5/3}}+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^{11/3}}\right).$$

そして Perron の公式によって

$$M^{\pm}(q;X)=\alpha_q^{\pm}X+\beta_q^{\pm}\frac{X^{5/6}}{5/6}+E(q;X) \tag{18}$$

の形の評価を得る．ここで Landau の定理をもともとの形で適用すれば直ちに次を得る．

$$E(q;X)\ll_{q,\epsilon}X^{3/5+\epsilon}. \tag{19}$$

しかし，(14) に (16), (18) を代入すると

$$M^{\pm}(q;X)=X\sum_{q\le Q}\mu(q)\alpha_q^{\pm}+X^{5/6}\sum_{q\le Q}\mu(q)\beta_q^{\pm}+O_\epsilon(Q^{-1+\epsilon}X)+\sum_{q\le Q}\mu(q)E(q;X) \tag{20}$$

となるから，最後の誤差項を評価して定理 1 を得るために必要なのは，$E(q;X)$ の (19) のような q ごとの評価ではなく，q についても一様な評価なのである．

$E(q;X)$ は $\xi_q^{\pm}(s)$ の関数等式によって記述される量だから，問題は命題 12 で現れた Ψ_q の，次の有限フーリエ変換 $\widehat{\Psi_q}$ の，q についての一様評価に帰着する．

$$\widehat{\Psi_q}\colon V^*_{\mathbb{Z}/q^2\mathbb{Z}}\to\mathbb{C};\qquad \widehat{\Psi_q}(g):=q^{-8}\sum_{f\in V_{\mathbb{Z}/q^2\mathbb{Z}}}\Psi_q(f)\exp\left(\frac{2\pi i[f,g]}{q^2}\right).$$

今回の研究では，もう一つの論文 [36, Theorem 6.3] でこの指標和の明示公式を得た．特に，平均的にはかなり小さな値となることが分かった．その証明は概ね初等的である．中国剰余定理に

より q が素数の場合に帰着するが，$V_{\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}}$ と $V^*_{\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}}$ を $G_{\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}}$ の作用で軌道分解し，軌道ごとに計算する．軌道の個数は 10 以上になるが，ベクトル空間が 4 次元で比較的小さいため，すべてを具体的に書き下し計算してしまうことがそれほど困難ではなかった．

この公式を用いて得られた一様評価が次である．

定理 13 ([35])

$$E(q;X) \ll_\epsilon q^{2/5+\epsilon}X^{3/5+\epsilon}, \tag{21}$$

$$\sum_{q\le Q}\mu(q)E(q;X) \ll_\epsilon Q^{4/5+\epsilon}X^{3/5+\epsilon}. \tag{22}$$

(22) は (21) からは出ないが，少し特殊な工夫によって，今回の目的のためにはより有用な (22) が得られる．以上で証明が完了する．(20) の主要項については $\alpha_q^\pm \ll_\epsilon q^{-2+\epsilon}$, $\beta_q^\pm \ll_\epsilon q^{-5/3+\epsilon}$ から

$$X\sum_{q>Q}|\alpha_q^\pm| = O_\epsilon(Q^{-1+\epsilon}X), \quad X^{5/6}\sum_{q>Q}|\beta_q^\pm| = O_\epsilon(Q^{-2/3+\epsilon}X^{5/6})$$

であり，また

$$\sum_q \mu(q)\alpha_q^\pm = C^\pm\frac{\pi^2}{72}\frac{1}{\zeta(2)\zeta(3)} + \frac{\pi^2}{24}\frac{1}{\zeta(2)^2} = \frac{C^\pm}{12\zeta(3)} + \frac{1}{4\zeta(2)},$$

$$\sum_q \mu(q)\frac{\beta_q^\pm}{5/6} = K^\pm\frac{\pi^2\zeta(1/3)}{9\Gamma(2/3)^3}\frac{6/5}{\zeta(2)\zeta(5/3)} = K^\pm\frac{4\zeta(1/3)}{5\Gamma(2/3)^3\zeta(5/3)},$$

である．よって (20) に (22) を代入すれば次を得る．

$$\begin{aligned}M^\pm(X) = {}& \frac{C^\pm}{12\zeta(3)}X + \frac{1}{4\zeta(2)}X + K^\pm\frac{4\zeta(1/3)}{5\Gamma(2/3)^3\zeta(5/3)}X^{5/6} \\ & + O_\epsilon(Q^{-1+\epsilon}X + Q^{-2/3+\epsilon}X^{5/6} + Q^{4/5+\epsilon}X^{3/5+\epsilon})\end{aligned}$$

$Q = X^{2/9}$ と選ぶと誤差項は $O_\epsilon(X^{7/9+\epsilon})$ となり，(17), (1) より定理 1 が示される．

4 算術級数中の 3 次体の判別式

3 次体の判別式の個数についてよい漸近評価を得たが，これらを合同類別で分けて数えるとどうなるだろうか．判別式を $m \ge 1$ を法とする合同類別で分けて数える関数を考える：

$$N_3^\pm(X;m,a) := \#\left\{F \;\middle|\; \begin{array}{l}[F:\mathbb{Q}]=3,\ 0<\pm\mathrm{Disc}(F)<X, \\ \mathrm{Disc}(F)\equiv a \mod m\end{array}\right\}.$$

a は自然に $\mathbb{Z}/(m)$ の元とみなす．簡単のため，m が素数 p のときを考える．$a=0$ のときは，$\mathrm{Disc}(F)\in p\mathbb{Z}$ は F が p で分岐するという条件で，この $N_3^\pm(X;p,0)$ については定理 1 を証明するときに同時に漸近公式が証明される．したがって $a\in\mathbb{F}_p^\times$ の場合が問題になるが，ここで面白い現象が見出される．$p=5,7$ のときに $X = 2\cdot 10^6$ で実際の個数を数えると次のようになる．

a	1	2	3	4
$N_3^+(2\cdot 10^6;5,a)$	22887	22751	22748	22781

a	1	2	3	4	5	6
$N_3^+(2\cdot 10^6;7,a)$	17229	14327	15323	17027	18058	15150

法が 5 の場合はほぼ等分布で差は 150 未満 (1%未満) であるのに対し，法が 7 の場合は最大で 3500 以上もの差がある．さらなる数値実験をすると，これは偶然ではないことが明らかになる．具体的には，$p = 11, 17, 23, 29$ などの $p \equiv 2 \mod 3$ ときはほぼ等分布，$p = 13, 19, 31$ などの $p \equiv 1 \mod 3$ のときは顕著な偏りが見て取れる．

実はゼータ関数の立場からは，この現象に対応する命題が既に示されていた．次の定理は，Shintani [32] の研究をアデール化する 1988 年の Wright [40] の研究の中で指摘された．

定理 14 (Wright [40]) Dirichlet 指標 χ で捻った新谷 L 関数 $\xi(s,\chi)$ は，χ が自明な指標のとき $s = 1, 5/6$ にのみ一位の極を持ち，χ が位数 3 の指標のときは $s = 5/6$ にのみ一位の極を持ち，χ がそれ以外のときは極をもたない．いずれの場合も極以外では全複素数平面上で正則である．

極の留数を計算し，3 節と同様の議論を行うと次が示される．

定理 15 ([35]) χ を $\mathbb{F}_p^\times$ 上の非自明な Dirichlet 指標とし，

$$N_3^{\pm}(X;\chi) := \sum_{\substack{[F:\mathbb{Q}]=3 \\ 0<\pm\mathrm{Disc}(F)<X}} \chi(\mathrm{Disc}(F))$$

と定義する．χ が位数 6 の指標でなければ $N_3^{\pm}(X;\chi) = O(X^{7/9+\epsilon})$ である．χ が位数 6 の指標[8]のときは，

$$N_3^{\pm}(X,\chi) = K^{\pm}\frac{(1-p^{-1})\tau(\chi^2)^3}{p^2}\frac{4L(1/3,\chi^{-2})}{5\Gamma(2/3)^3L(5/3,\chi^2)}X^{5/6} + O(X^{7/9+\epsilon}),$$

ただし $\tau(\chi^2) = \sum_{t\in\mathbb{F}_p^\times}\chi^2(t)\exp(2\pi it/p)$ は Gauss 和である．

$p \equiv 2 \mod 3$ のときは $\mathbb{F}_p^\times$ には位数 6 の指標が存在せず，$p \equiv 1 \mod 3$ のときは $\mathbb{F}_p^\times$ には位数 6 の指標が存在する．このことが，$N_3^{\pm}(X,\chi)$ が $X^{5/6}$ のオーダーの主要項を持つことがありうるかそうでないかの違いとなる．そして定義より

$$N_3^{\pm}(X;\chi) = \sum_{a\in\mathbb{F}_p^\times}\chi(a)N_3^{\pm}(X;p,a)$$

だから，指標の直交関係式によって，$N_3^{\pm}(X;p,a)$ の第二主要項に偏りが生ずるかどうかの差となる．すなわち，漸近式は

$$N_3^{\pm}(X,p;a) = C_p^{\pm}X + K_p^{\pm}(a)X^{5/6} + O(X^{7/9+\epsilon}) \tag{23}$$

の形になり，$p \equiv 2 \mod 3$ のときは $K_p^{\pm}(a)$ はすべての $a \in \mathbb{F}_p^\times$ で一定だが，$p \equiv 1 \mod 3$ のときは $K_p^{\pm}(a)$ は $a \in \mathbb{F}_p^\times$ によって異なる．実際の個数と 2 つの主要項による近似値を比較してお

[8]定理 14 では指標の位数が 3 かどうかが問題であったが，ここでは指標の位数が 6 かどうかが問題になっている．ここには技術的な問題があって，判別式の群の作用による相対不変性が $\mathrm{Disc}(g\cdot f) = (\det g)^2\mathrm{Disc}(f)$ と，$\det g$ 倍でなく $(\det g)^2$ 倍になることに理由がある．紙数を要するためここでは $\xi(s,\chi)$ の正確な定義を与えられないが，詳しくは [40, 36] を参照されたい．

こう.

a	1	2	3	4
$N_3^+(2\cdot 10^6;5,a)$	22887	22751	22748	22781
2つの主要項	22757	22757	22757	22757

a	1	2	3	4	5	6
$N_3^+(2\cdot 10^6;7,a)$	17229	14327	15323	17027	18058	15150
2つの主要項	17209	14277	15316	17023	18062	15130

定理1と同様，2つの主要項は実際の個数をかなりよく近似していることが見て取れる.

一般の法 m の場合は公式はやや複雑になるが，すべての場合を扱うことができる．やはり，$(\mathbb{Z}/(m))^\times$ が3次指標をもつときに偏りが生ずる．その根拠は，ゼータ関数の立場からは定理14だが，代数的な立場からはまだあまり明快な解釈は得られていない.

5 2次体のイデアル類群の3等分点の分布

2次体 F について，$\mathrm{Cl}_3(F)$ で F のイデアル類群の3等分点全体のなす部分群を表す．この個数の平均を問う問題が今回の問題と密接に繋がっていることはよく知られており，実際に Davenport-Heilbronn [12] で主要項が決定され，Belabas-Bhargava-Pomerance [1] により誤差項が改良され,

$$\sum_{\substack{[F:\mathbb{Q}]=2\\ 0<\pm\mathrm{Disc}(F)<X}} \#\mathrm{Cl}_3(F) = \frac{3+C^{\pm}}{\pi^2}X + O(X^{7/8+\epsilon})$$

が示されていた．今回の研究で，この関数についてもやはり第二主要項が存在することを示すことができた.

定理 16 ([35])

$$\sum_{\substack{[F:\mathbb{Q}]=2\\ 0<\pm\mathrm{Disc}(F)<X}} \#\mathrm{Cl}_3(F) = \frac{3+C^{\pm}}{\pi^2}X + K^{\pm}\frac{8\zeta(1/3)}{5\Gamma(2/3)^3}\prod_p\left(1-\frac{p^{1/3}+1}{p(p+1)}\right)X^{5/6} + O(X^{18/23+\epsilon})$$

である．ただし，第二主要項の積はすべての素数をわたる.

また，この場合も判別式の法 m での合同類別を考えると，3次指標が存在するときに偏りが生ずる．例えば，判別式を7で割って1余るような2次体の族を考えると，それらは，7で割って2余るような2次体の族よりも，イデアル類群に3等分点をより多くもつことが分かる.

6 文献紹介

いくつか文献を紹介して締めくくりとしたい．多数の概均質ベクトル空間が代数体の数え上げに有効であることは，Wright-Yukie [41] によって明らかになった．Bhargava は一連の論文 “Higher composition laws I-IV” [2, 3, 4, 6] で，[41] で扱われた空間を中心とする13種類の概均

質ベクトル空間について $\mathbb{Z}$ 軌道を系統的に考察し，命題 4 を特別な一例として含む，非常に豊富な構造を発見した[9]．Bhargava は引き続く [5, 7] で，特に概均質ベクトル空間

$$\mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^3 \otimes \mathbb{Z}^2, \qquad \wedge^2\mathbb{Z}^5 \otimes \mathbb{Z}^4$$

を用いることにより，4 次体と 5 次体を数える関数の主要項を決定した．一般に

$$N_n(\mathfrak{S}_n; X) := \#\{F \mid [F:\mathbb{Q}] = n, \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{nc}}/F) \cong \mathfrak{S}_n, |\mathrm{Disc}(F)| < X\}$$

とおこう．ただし F^{nc} は F の Galois 閉包を表し，同型な体は一度だけ数えることにする．誤差項の改良の研究もされており，現在それぞれ [1], [31] により，

$$N_4(\mathfrak{S}_4; X) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)\prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^4}\right) X + O(X^{23/24+\epsilon}), \tag{24}$$

$$N_5(\mathfrak{S}_5; X) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{120} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8}\right)\prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^4} - \frac{1}{p^5}\right) X + O(X^{399/400+\epsilon}), \tag{25}$$

が示されている．ここに積の p はすべての素数をわたる．また (24) の右辺の和 $\frac{1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ はそれぞれ，無限素点での分解条件を指定した族それぞれの寄与を表し，順に総実 4 次体，実素点が 2 個の 4 次体，総虚 4 次体の寄与である．(25) の右辺の和も同様である．詳しくは [5, 7] を参照されたい．

概均質ベクトル空間のゼータ関数については，一般論は Sato-Shintani [30] で出来上がったが，整数論への明示的な応用のためには，個々のゼータ関数をより詳細に調べることが欠かせない．概均質ゼータ関数はリーマンゼータ関数や単純環のゼータ関数などの古典的な例も多く含んでいるが，本稿で紹介した 2 元 3 次形式の空間のゼータ関数は，概均質ベクトル空間の理論によって新しく存在が明らかとなった中でいちばん基本的な例と言える．本稿では，その極の構造と留数公式，そして関数等式の考察が系 7 及び定理 1, 15, 16 に用いられることを見た．2 元 3 次形式の空間のゼータ関数の解析的性質については，Shintani [32] の後も [40, 11, 36] などで順次調べられてきたが，他の概均質ベクトル空間のゼータ関数についてもさまざまな研究が望まれる．

概均質ベクトル空間のゼータ関数について，これまでの研究の発展を網羅することは筆者の手に余るが，重要なものや興味深いものを少しだけ挙げておくと，ゼータ関数の明示公式 (Ibukiyama-H.Saito [18], H.Saito [27])，ガウス和の明示公式 (Denef-Gyoja [14])，局所ゼータ関数 (Kimura-F.Sato-Zhu [20], Igusa [19])，大域ゼータ関数 (収束 H.Saito [28]，極の構造 Yukie [42])，多変数のゼータ関数 (F. Sato [29])，Weyl 群多重 Dirichlet 級数との関係 (Wen [39]) などがある．

2 元 3 次形式の空間のゼータ関数についてある程度詳しく説明してきたので，今一つ次の定理を紹介して，結びとしたい．この驚くほど単純な関係式は，大野泰生氏の 1995 年の修士論文で予想され，中川仁氏によって証明された．

定理 17 (Ohno [23], Nakagawa [22]) 定義 5 のゼータ関数について，

$$\xi_+^*(s) = \xi_-(s) \qquad \xi_-^*(s) = 3\xi_+(s)$$

が成り立つ．

[9] Bhargava の理論と関連する話題については，筆者の概説論文 [34] "高次合成則入門" で，密度定理への応用なども含めてある程度詳しく紹介した．興味あるかたはご覧いただきたい．

公式の単純さに比して，Nakagawa [22] による証明は簡単とも初等的とも言いがたく，類体論を駆使した複雑かつ精巧なものである．2元3次形式の空間のゼータ関数については，格子に合同条件をつけた変種のゼータ関数にも同様の関係式が存在することが，[25, 24, 36] などで見出されている．他の空間のゼータ関数についてもこのような関係式があるかなど，定理 17 は多くの問題を示唆している．これについて興味のあるかたは，著者の解説 [33] も参照されたい．

謝辞. 本稿は 2013 年 11 月に京都大学数理解析研究所で行われた研究集会 “Analytic Number Theory – Arithmetic Properties of Transcendental Functions and their Applications” での筆者の講演が基になっている．講演と本稿執筆の機会を与えていただいた，研究代表者の田中孝明氏に感謝します．

参考文献

[1] M Belabas, M. Bhargava, and C. Pomerance. Error estimates for the Davenport-Heilbronn theorems. *Duke. Math. J.*, 153:173–210, 2010.

[2] M. Bhargava. Higher composition laws I: A new view on Gauss composition, and quadratic generalizations. *Ann. Math.*, 159:217–250, 2004.

[3] M. Bhargava. Higher composition laws II: On cubic analogues of Gauss composition. *Ann. Math.*, 159:865–886, 2004.

[4] M. Bhargava. Higher composition laws III: The parametrization of quartic rings. *Ann. Math.*, 159:1329–1360, 2004.

[5] M. Bhargava. The density of discriminants of quartic rings and fields. *Ann. Math.*, 162:1031–1063, 2005.

[6] M. Bhargava. Higher composition laws IV: The parametrization of quintic rings. 167:53–94, 2008.

[7] M. Bhargava. The density of discriminants of quintic rings and fields. *Ann. Math.*, 172:1559–1591, 2010.

[8] M. Bhargava. The geometric sieve and the density of squarefree values of invariant polynomials. 2014. preprint, arXiv:1402.0031.

[9] M. Bhargava, A. Shankar, and J. Tsimerman. On the Davenport-Heilbronn theorem and second order terms. *Invent. Math.*, 193:439–499, 2013.

[10] K. Chandrasekharan and R. Narasimhan. Functional equations with multiple gamma factors and the average order of arithmetical functions. *Ann. Math.*, 76:93–136, 1962.

[11] B. Datskovsky and D.J. Wright. The adelic zeta function associated with the space of binary cubic forms II: Local theory. *J. Reine Angew. Math.*, 367:27–75, 1986.

[12] H. Davenport and H. Heilbronn. On the density of discriminants of cubic fields. II. *Proc. Royal Soc.*, A322,:405–420, 1971.

[13] B.N. Delone and Faddeev D.K. *The theory of irrationalities of the third degree*, volume 10 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, 1964.

[14] J. Denef and A. Gyoja. Character sums associated to prehomogeneous vector spaces. *Compositio Math.*, 113:273–346, 1998.

[15] W.T. Gan, B. Gross, and G. Savin. Fourier coefficients of modular forms on G_2. *Duke Math. J.*, 115:105–169, 2002.

[16] G.H. Hardy and E.M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, Oxford, 6th edition, 2008.

[17] C. Hooley. *Applications of sieve methods to the theory of numbers*, volume 70 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, 1976.

[18] T. Ibukiyama and H. Saito. On zeta functions associated to symmetric matrices and an explicit conjecture on dimensions ofsiegel modular forms of general degree. *Internat. Math. Res. Notices*, no. 8:161–169, 1992.

[19] J. Igusa. *An introduction to the theory of local zeta functions*, volume 14 of *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society, International Press, Providence, Cambridge, 2000.

[20] T. Kimura, F. Sato, and X.-W. Zhu. On the poles of p-adic complex powers and the b-functions of prehomogeneous vector spaces. *Amer. J. Math.*, 112:423–437, 1990.

[21] E. Landau. Über die Anzahl der Gitterpunkten in geiwissen Bereichen II. *Gött. Nach.*, pages 209–243, 1915.

[22] J. Nakagawa. On the relations among the class numbers of binary cubic forms. *Invent. Math.*, 134:101–138, 1998.

[23] Y. Ohno. A conjecture on coincidence among the zeta functions associated with the space of binary cubic forms. *Amer. J. Math.*, 119:1083–1094, 1997.

[24] Y. Ohno and T. Taniguchi. Relations among Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary cubic forms II. *Math. Res. Lett.* to appear.

[25] Y. Ohno, T. Taniguchi, and S. Wakatsuki. Relations among Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary cubic forms. *Amer. J. Math.*, 131:1525–1541, 2009.

[26] D.P. Roberts. Discriminants of cubic field discriminants. *Math. Comput.*, 70:1699–1705, 2001.

[27] H. Saito. Explicit form of the zeta functions of prehomogeneous vecotr spaces. *Math. Ann.*, 315:587–615, 1999.

[28] H. Saito. Convergence of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces. *Nagoya. Math. J.*, 170:1–31, 2003.

[29] F. Sato. Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vetor spaces I: Functional equations. *Tôhoku Math. J.*, (2) 34:no. 3 437–483, 1982.

[30] M. Sato and T. Shintani. On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces. *Ann. of Math.*, 100:131–170, 1974.

[31] A. Shankar and J. Tsimerman. Counting S_5-fields with a power saving error term. preprint, arXiv:1310.1998.

[32] T. Shintani. On Dirichlet series whose coefficients are class-numbers of integral binary cubic forms. *J. Math. Soc. Japan*, 24:132–188, 1972.

[33] T. Taniguchi. 2元3次形式の空間に付随するゼータ関数の双対恒等式. 第54回代数学シンポジウム報告集, 183–192, 2009.
(`http://mathsoc.jp/section/algebra/algsymp_past/algsymp09.html` より入手可能)

[34] T. Taniguchi. 高次合成則入門. *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, B25:211–254, 2011.

[35] T. Taniguchi and F. Thorne. Secondary terms in counting functions for cubic fields. *Duke Math. J.*, 162:2451–2508, 2013.

[36] T. Taniguchi and F. Thorne. Orbital L functions for the space of binary cubic forms. *Canad. J. Math.*, 65:1320–1383, 2013.

[37] F. Thorne. Four perspectives on secondary terms in the Davenport-Heilbronn theorems. *Integers*, 12B. Proceedings of the Integers Conference 2011.

[38] F. Thorne. Shintani's zeta function is not a finite sum of Euler products. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 142:1943–1952, 2014.

[39] J. Wen. Bhargava integer cubes and Weyl group multiple Dirichlet series. preprint, arXiv:1311.2132.

[40] D.J. Wright. The adelic zeta function associated to the space of binary cubic forms part I: Global theory. *Math. Ann.*, 270:503–534, 1985.

[41] D.J. Wright and A. Yukie. Prehomogeneous vector spaces and field extensions. *Invent. Math.*, 110:283–314, 1992.

[42] A. Yukie. *Shintani Zeta Functions*, volume 183 of *London Math. Soc. Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.